

Universität Basel

**Berufsmaturität Schlussprüfung
Mathematik –
Analyse von Aufgaben 2004**

Monica Cervilla und Gerhard Steiner

Monica Cervilla, lic. phil., ist wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Psychologie im Rahmen des gemeinsamen Projekts des BBT und der Universität Basel „Förderung der Lernkompetenzen in der Berufsbildung“. Prof. Dr. Gerhard Steiner ist Leiter des Leading House „Lernkompetenzen in der Berufsbildung“ und damit verantwortlicher Partner des BBT (Bundesamt für Berufsbildung und Technologie).

Basel, 12. Mai 2006/--

1. Aufgabe an die Arbeitsgruppe

Der Auftrag an die Universität Basel war, eine vergleichende Analyse der schriftlichen Schlussprüfungen für die Berufsmaturität im Fach Mathematik der Prüfungssession 2004 vorzunehmen. Es galt dabei folgende drei Punkte zu begutachten:

1. Formaler Aufbau der Prüfungen
2. Erfüllung der Kriterien des Rahmenlehrplans (RLP)
3. Beurteilung des Schwierigkeitsgrades der Prüfungen; dafür war ein Verfahren zu entwickeln

Zu Punkt 2

Die Anforderungen des Rahmenlehrplans wurden danach beurteilt, welche kognitiven Ansprüche die gestellten Aufgaben an die Geprüften stellen. Dabei wurden *Fertigkeiten* und *Kompetenzen* voneinander unterschieden

Mit dem Stichwort *Kompetenzen* meinen wir jene grundlegenden Fähigkeiten, die den korrekten Umgang mit mathematischen Aufgaben ermöglichen: das *Verstehen* einer Problemstellung, das *Interpretieren* mathematischer Aussagen, das *Planen von Problemlöseschritten* oder das *Übertragen* von Regelwissen auf neue Aufgabenstellungen. Man spricht manchmal von Prozessen der Tiefenverarbeitung im Umgang mit mathematischen Aufgaben.

Unter *Fertigkeiten* wurden primär jene Verfahren (oder Prozeduren) verstanden, über die jemand verfügen muss, um mathematische Operationen auszuführen, wenn der Problemlösungsweg einmal klar geworden ist (alle Rechenoperationen, auch die höheren wie das Radizieren, Potenzieren und Logarithmieren; dann vor allem algebraisches Bruchrechnen, das Auflösen von Gleichungen, das Anwenden von Regeln und das Kennen der Symbole). In diesem Zusammenhang wird auch vom „handwerklichen“ Können in Mathematik gesprochen. Im Allgemeinen werden diese Fertigkeiten in den von uns analysierten schriftlichen Mathematikprüfungen in einem *ersten Teil* geprüft, in dem keinerlei Hilfsmittel verwendet werden dürfen.

Nicht immer lassen sich im konkreten Umgang mit Mathematikaufgaben die Kompetenzen von den Fertigkeiten scharf trennen: Problemlösungen verlangen hohe Kompetenzen, sind aber auch auf Fertigkeiten angewiesen. Und umgekehrt können Fertigkeiten nicht kopflos (ohne Kompetenz) ausgeführt werden. Im Anhang werden die Fertigkeiten und die Kompetenzen in Anlehnung an den Rahmenlehrplan Mathematik in ausdifferenzierter Form dargestellt. Diese Liste diente der Analyse der Aufgaben des jeweils ersten Teils der Mathematikprüfungen. Dort, wo die Mathematikprüfungen aus nur einem Teil bestanden, haben wir diejenigen Aufgaben herausgegriffen und beurteilt, die solche Fertigkeiten erforderlich machten.

Zu Punkt 3

Zur Einschätzung des Schwierigkeitsgrades der Aufgaben musste ein Verfahren entwickelt werden. Die Schwierigkeit einer Aufgabe hängt einerseits vom *Komplexitätsgrad* der Aufgabe, andererseits vom *verfügbaren Vorwissen* der Probanden (Prüflinge) ab. Da es nicht möglich ist, Annahmen über den individuellen Vorwissensstand der Lernenden zu treffen, konzentrierte sich die Entwicklung des Einschätzungsverfahrens auf den *Aufbau* der Aufgaben, der im Lösungsweg fassbar ist. Es wurden aus diesem Grund alle Aufgaben durchgerechnet, die Lösungswege festgehalten und mit denen verglichen, die uns die Konstrukteure der Prüfungen in ihren Unterlagen mitgeliefert hatten. Die Übereinstimmung war praktisch perfekt – ein Charakteristikum von Mathematikaufgaben, deren Lösungswege relativ einfach determiniert werden können, weil sie in den meisten Fällen eindeutig sind.

Die Einschätzung des Schwierigkeitsgrades von Mathematik-Aufgaben konzentrierte sich auf die *zweiten Teile* der Prüfungen, in denen es um Problemlösungen ging und in dem Hilfsmittel erlaubt waren. Das niedrigste Niveau der Analyse („*einfache Schritte*“) betrifft ganzheitliche Schritte wie das Umformen einer Gleichung, also nicht die einzelnen ganz elementaren Schritte dazu wie etwa das Ein- oder Ausklammern, das Multiplizieren beider Seiten einer Gleichung oder das Faktorisieren. Als „*mittelschwere Schritte*“ wurden solche bewertet, bei denen zuerst eine Analyse der Gegebenheiten vorgenommen werden musste, d.h. wo das Problem nicht einfach unmittelbar rechnerisch in „*einfachen Schritten*“ gelöst werden konnte. „*Schwierige oder komplexe Schritte*“ waren solche, die ausser einem analytischen Zerlegen auch Inferenzen verlangten, d.h. Wissen und Problemlöse- oder Verfahrensschritte, die nicht a priori aus der Aufgabenstellung ersichtlich waren. Komplex konnten Schritte auch sein, wenn sie Anwendungscharakter hatten, sich also beispielsweise auf eine Formel aus der Physik bezogen.

Im Anhang haben wir für diese drei Schwierigkeitsgrade je ein Beispiel aufgeführt (einfache, mittelschwere und komplexe Schritte mit entsprechenden Aufgaben).

Für die Beurteilung der Aufgaben im zweiten Teil der Prüfungen sind die Schritte des entsprechenden Schwierigkeitsgrades *aufaddiert* worden (ohne die ganz elementaren Operationsschritte mitzuzählen, von denen im Zusammenhang mit den Fertigkeiten die Rede war), sodass für jedes geprüfte Gebiet *Summendaten* für die Schritte jedes Schwierigkeitsgrades in Form eines *Säulendiagramms* entstanden.

2. Zu analysierende Daten

Alle Berufsmaturitätsschulen der Deutschschweiz sind angeschrieben und um Unterlagen gebeten worden: Daten zur Gestaltung der Mathematikprüfung (Angaben über Aufteilungen, Dauer der Teile, Bewertungen, Hilfsmittel), Aufgaben der Schlussprüfung 2004, die Lösungswege zu den Aufgaben und Kommentare dazu sowie Einschätzungen von deren Schwierigkeitsgrad (anhand eines Fragebogens).

31 Schulen haben Unterlagen zurückgesandt, darunter waren 18 Mathematik-Schlussprüfungen. Davon stammten 8 aus technischen, 8 aus kaufmännischen und 2 aus gewerblichen BM-Schulen. Der Analyse der 8 Mathematikprüfungen für die *technische Berufsmaturität* gilt der vorliegende Bericht. Diese 8 Prüfungen sind zwar geographisch nicht flächendeckend, repräsentieren aber dennoch grosse Gegenden der Deutschschweiz.

3. Ergebnisse der Analysen

Jede Schule, deren Mathematik-Aufgaben für die Schlussprüfung 2004 analysiert worden sind, wurde durch drei graphische Darstellungen charakterisiert: (a) durch eine formale Beschreibung ihrer Prüfungen, (b) eine Analyse des ersten Teils der Prüfung (einfache Aufgaben ohne Benützung von Hilfsmitteln) und (c) eine Analyse des Schwierigkeitsgrades der Aufgaben des jeweils zweiten Teils der Prüfung.

3.1 Formale Beschreibungen

Der jeweiligen Matrix sind Angaben über die beiden Teile zu entnehmen (drei Schulen hatten nur einen Teil). Die Angaben brauchen keine weitere Erläuterung.

<p>Befund: Die Dauer der Prüfungen weist eine grosse Spanne auf: von 2.5 bis 4.5 Stunden. Im Allgemeinen ist der anspruchsvollere zweite Teil auch der längere.</p>
--

3.2 Analyse des ersten Teils der Prüfung

Die ersten Teile der Prüfungen enthalten die einfachen Aufgaben, die ohne jegliches Hilfsmittel gelöst werden sollen. Es werden hier also vor allem Fertigkeiten (Verfahren, Prozeduren) geprüft. Freilich gehört, wie oben schon angedeutet, auch ein gewisses Mass an Kompetenzen dazu. Die Basis für die entsprechende Analyse sind die Kriterien für *Fertigkeiten* und *Kompetenzen*. Die graphischen Darstellungen lesen sich folgendermassen:

Die linke Matrix (sie ist immer kleiner als die rechte) enthält senkrecht die 8 Kriterien für die Fertigkeiten. Waagrecht sind die zu lösenden Aufgaben aufgeführt, für jede Schule unterschiedlich viele (mit A1, A2 etc. bezeichnet). Die ausgefüllten Felder markieren, welche Fertigkeiten mit welcher Aufgabe abgedeckt werden. Aus der Anzahl ausgefüllter Felder kann demnach das Ausmass der formellen Erfüllung der Anforderungen des Rahmenlehrplans hinsichtlich der Fertigkeiten abgelesen werden. Ein Vergleich zwischen den Schulen lässt deutliche Unterschiede erkennen.

Entsprechendes gilt für die Kompetenzen, deren Erfüllung gemäss Rahmenlehrplan in der jeweils rechten Matrix abgebildet ist. Es sind dort senkrecht 12 Kriterien (von K1 bis K12) aufgeführt, und die Aufgabenzahl variiert mit jeder Schule, wie schon oben vermerkt. In der rechten Matrix wird versucht, auch die Verarbeitungsanteile zu erfassen, die nicht ausschliesslich elementar rechnerisches Können implizieren, sondern auch Anteile von etwas anspruchsvollerem Verfahrenswissen prüfen (eben: Kompetenzen). Allerdings gibt diese Analyse letztlich nur eine Antwort auf die Frage: Werden die Anforderungen des RLP durch die gestellten Aufgaben grundsätzlich abgedeckt? Keine Angaben können bezüglich der *qualitativen* Ansprüche (Schwierigkeitsgrad) des RLP gemacht werden.

Befund: Auch wenn aufgrund dieser ersten Analyse keinerlei Angaben über die Schwierigkeit der einzelnen Aufgaben gemacht werden können, sieht man zweierlei: Die Schulen erfüllen bezüglich RLP alle einen *minimalen Standard*. Es bestehen aber schon *quantitativ* erstaunliche *Unterschiede* zwischen den Schulen.

3.3 Schwierigkeitsgrad der Aufgaben des zweiten Teils der Prüfungen

Die Säulendiagramme fokussieren auf das Kernstück der Aufgabenanalysen. Sie bilden die Schwierigkeit der Aufgaben des zweiten Prüfungsteils ab und zwar für die folgenden fünf inhaltlichen Bereiche: Mengenlehre/Logik, reelle Zahlen, Gleichungen, Funktionen, Geometrie einschliesslich Trigonometrie. Die Säulen stellen *aufaddierte* Lösungsschritte unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades dar. Die *weissen* Säulen sind aufsummierte *einfache* Lösungsschritte, wobei nochmals daran erinnert sei, dass beispielsweise das Auflösen einer einfachen linearen Gleichung als *ein* einfacher Schritt gezählt wurde. Die hellblauen Säulen repräsentieren *mittelschwere* und die dunkelblauen *schwierige, komplexe* Schritte. Da bei diesen Analysen überhaupt keine der ganz elementaren Schritte gezählt wurden, sind die Anzahlen der aufaddierten Schritte nicht übermässig gross, auch wenn mehrere Aufgaben gelöst werden mussten. Dennoch vermitteln die Häufigkeiten und die Verteilung ein klares Bild von den Ansprüchen, die die Aufgaben an die Probanden gestellt haben.

Befunde: Die Schulen unterscheiden sich in einem *unerwartet hohen Masse* voneinander. Die qualitative Analyse aller Aufgaben (,die hier nicht im Detail dargestellt ist,) zeigt, dass die Ansprüche verschiedener Schulen an ihre Berufsmaturandinnen und -maturanden im (üblicherweise schwierigeren) zweiten Teil der Prüfung *niedriger* sind, als die Ansprüche anderer Schulen in ihrem ersten, üblicherweise einfacheren Teil der jeweiligen Prüfungen.

Die Tatsache, dass es im zweiten Teil keine Aufgaben aus dem Bereich der Mengenlehre gab, weist auf deren Elementarität hin. Wenn überhaupt, so wurden solche im ersten Teil geprüft. Die wenigen Aufgaben aus dem Bereich der reellen Zahlen lassen sich ebenfalls damit begründen, dass solche vorwiegend im ersten Teil der Prüfung an die Reihe kamen, wo es darum ging, den Umgang mit einfachen Einzeloperationen zu prüfen.

Es gibt Schulen mit sehr hohen Ansprüchen in mehreren Themenbereichen gegenüber anderen mit ausschliesslich einfachen Ansprüchen.

4. Weitere Informationen aus den Fragebogen

In Bezug auf die Benotung von Examen geht aus den Stellungnahmen von Lehrkräften hervor, dass nicht immer die *Lernziele der Bezugsrahmen* für die Benotung sind, dass vielmehr der *Klassendurchschnitt* als Bezugsrahmen verwendet wird. Für die Sicherung eines am RLP orientierten Leistungsniveaus ist es wichtig, dass die Punktezahl, die gerade noch eine genügende Leistung darstellt, vor der Durchführung der Examen aufgrund der curricularen Gegebenheiten und der entsprechenden Lernziele festgesetzt wird. Nur so können Verzerrungen in den Leistungsbeurteilungen verhindert werden. Prüfungen, die von grösseren Lehrerkollegien ausgearbeitet worden sind, sind weniger anfällig auf derartige nachträgliche Verzerrungen.

5. Erkenntnisse

Die vom RLP vorgegebenen Richtlinien werden weitgehend eingehalten. Einzelne Prüfungsserien umfassen Gebiete, die im Rahmenlehrplan nicht vorgesehen sind (z.B. Folgen und Reihen, rationale Funktionen). Dies sagt aber über die Qualität der Einhaltung nichts aus. Es gibt im Weiteren grosse quantitative Unterschiede zwischen den Prüfungen einzelner Schulen. Der RLP in der vorliegenden Form ist *kein günstiges Instrument* für das Etablieren eines verbindlichen Niveaus geforderter Leistungen.

Die meisten Prüfungen bestehen aus zwei Teilen: einem eher einfachen ersten Teil (ohne Benützung von Hilfsmitteln), in dem primär mathematisch-arithmetische *Fertigkeiten* geprüft werden, und einem zweiten, dem anspruchsvollen Problemlöseteil, in dem Verstehen, Analysieren und Problemlösen – also mathematische Kompetenzen – im Mittelpunkt stehen. Der erste Teil ist meist deutlich kürzer als der zweite.

Fokussiert man auf den Schwierigkeitsgrad der Prüfungen, eignet sich der zweite Teil für eine Analyse und Beurteilung vortrefflich. Die Analysedaten zeigen massive Unterschiede hinsichtlich der Anforderungen, die die Aufgaben an die Probanden verschiedener Schulen stellen.

Schlussfolgerungen – Empfehlungen der Autoren

Bei der Überarbeitung der RLP müssen auch die qualitativen Ansprüche definiert werden. Dies geschieht wohl am einfachsten über Musteraufgaben, die qualitative Unterschiede in definierbaren Stufen erkennbar machen.

Die Zweiteilung der Prüfung ist sinnvoll und soll beibehalten werden, weil dadurch sowohl die Fertigkeiten als auch die Kompetenzen wirksam geprüft werden können. Es wird empfohlen, dass alle Schulen diese Zweiteilung vornehmen und dass die Dauer vereinheitlicht wird.

Die extrem grosse Streuung in den Anforderungen des problemlöseorientierten zweiten Teils der Prüfungen muss reduziert werden. Es wird empfohlen, die Prüfungen regional vorzubereiten, damit die Anforderungen zwischen den einzelnen Regionen vergleichbar sind. Im gleichen Atemzug kann auch die Punktelimite für die erwartete Leistung „genügend“ im Voraus festgesetzt werden.

cf : Stellungnahme der Eidg. Berufsmaturitätskommission vom 11. Dezember 2006